Bibliographie.

Sonderausgaben aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. (Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin).

Der Verlag der Encyklopädie hat sich erfreulicherweise entschlossen, aus einzelnen Artikeln, welche mit Rücksicht auf die gegenwärtigen Hauptrichtungen der mathematischen Forschung ein besonderes Interesse besitzen, Sonderausgaben zu veranstalten, um die betreffenden Artikel möglichst weiten Kreisen unmittelbar zugänglich zu machen. Bisher sind folgende Sonderausgaben erschienen:

E. Hilb und **M. Riesz, Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen.** 40 Seiten (Unter nachträglicher Berücksichtigung einzelner späterer Arbeiten abgeschlossen am 24. Juli 1922).

L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. 58 Seiten (Abgeschlossen im März 1924).

Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. Nach den Referaten von **L. Zoretti, P. Montel** und **M. Fréchet** bearbeitet von **A. Rosenthal.** 350 Seiten (Abgeschlossen im Juli 1923).

Max Simon: Nichteuklidische Geometrie in elementarer Darstellung. Bearbeitet und herausgegeben von *Kuno Fladt* (Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Nr. 10), XVIII + 115 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1925.

Das vorliegende Buch gibt im wesentlichen die Vorlesungen von Max Simon wieder. Die Absicht des Verfassers und des Bearbeiters ist die nichteuklidische Geometrie auf elementare Weise zu behandeln, besonders Rechnung tragend von deren historischen Entwicklung. Die starke Betonung des historischen Gesichtspunktes ist manchmal störend für den systematischen Aufbau der Theorie; manches wird nur beiläufig vom Herausgeber eingefügt, was systematisch und didaktisch den Kern der Betrachtung bilden sollte.

Der Inhalt gliedert sich folgendermassen: im ersten Abschnitt wird die Rolle des Parallelenaxioms in der Geometrie, im zweiten die nichteuklidische Elementargeometrie, im dritten die Trigonometrie, im vierten die Stereometrie behandelt. Die hyperbolische Geometrie wird überall der elliptischen vorgezogen und kein Gewicht wird darauf gelegt, die drei Geometrien in einheitlicher Darstellung zu entwickeln.

Das Buch ist leicht lesbar und wird sich für Studenten, die einen ersten Begriff von nichteuklidischer Geometrie erhalten wollen, als nützlich erweisen.

B. v. Kerékjártó.

E. Netto, Die Determinanten (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher No. 9), zweite verbesserte Auflage von *L. Bieberbach* VI + 122 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1925.

Herr Bieberbach unternahm die mühevolle aber dankbare Aufgabe die zweite Auflage von Nettos Determinanten für den Druck fertig zu stellen. Das Werk Nettos gehört zu denjenigen Lehrbüchern, die das Ziel des Verfassers in vorzüglicher Weise verwirklichen. Ein Lehrbuch der Determinantentheorie kann entweder die grossen Gesichtspunkte und die allgemeinen Theorien dieser Disziplin und ihrer Anwendungen entwickeln (diese Aufgabe ist in meisterhafter Weise in dem Lehrbuche Kowalewskis gelöst), oder aber die Handhabung dieses so wichtigen Hilfsmittels der gesamten Mathematik darlegen. Das letztere war das Ziel Nettos und er erreichte es durch die elementare — aber stets strenge — Begründung des Begriffes der Determinanten und der damit zusammenhängenden Rechnungsregeln, die durch zahlreiche Beispiele illustriert sind. Dabei gelangt er mit derselben Methode auch zu den Hauptanwendungen der Determinanten auf die Theorie der linearen Gleichungen und Substitutionen, auf die Resultanten und Diskriminanten. Die geometrischen Anwendungen, die im Kap. X. behandelt sind, sind geeignet den Leser von der Nutzbarkeit des Determinantenbegriffes zu überzeugen. Da ausserdem alle wesentlichen Gesichtspunkte, die in einem elementaren Lehrbuch entwickelbar sind, zur Sprache gelangen (Rang, Matrix, symmetrische Determinanten etc.), so kann das vorliegende Werk insbesondere den Studierenden, aber auch zum Selbstunterricht in höchstem Masse empfohlen werden.

A. H.

R. Strohal, Die Grundbegriffe der reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung. (Wissenschaft und Hypothese XXVII), 137 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1925.

Das vorliegende Büchlein stellt als Aufgabe, die psychologische Vorgeschichte der letzten Grundsätze der Geometrie zu untersuchen. Nach einer einleitenden Betrachtung über die philosophische Bedeutung der Definition werden die für die Geometrie grundlegenden Elementarbegriffe nach Lobatschefskij in dem „Körper" und in der „Berührung" gefunden. Nach Lobatschefskij werden die Begriffe von Reihen- und Wendeschnitten eingeführt und mit deren Hilfe Fläche und Linie definiert. Durch den Begriff der Kongruenz werden ebenfalls nach Lobatschefskij Ebene und Gerade definiert. Es folgen manche aus erkenntnistheoretischem Gesichtspunkte her interessanten Betrachtungen über Axiome, synthetische Definitionen und Postulate. Das Buch hat vor allem Interesse für Philosophen; die Mathematiker werden gegen das Buch vor allem einwenden, dass die vorliegende an Lobatschefskij anknüpfende Betrachtung vom Gesichtspunkte der modernen Mathematik nicht zweckmässig ist, da sie nicht imstande ist die n-dimensionale Geometrie zu begründen. Es wäre daher noch interessant, die Liesche gruppentheoretische Begründung der psychologischen Behandlung zu unterziehen.

B. v. Kerékjártó.

A. Hurwitz, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über **Geometrische Funktionentheorie** von **R. Courant** (Grundlehren der math. Wissenschaften III), XII + 496 S., zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage, Berlin, J. Springer, 1925.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine wesentliche Umgestaltung des von Herrn Courant herrührenden Abschnittes über geometrische Funktionentheorie; die beiden ersten Abschnitte (Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und elliptische Funktionen) sind ohne erheblichere Änderungen beibehalten worden. Es wird daher genügen, den Abschnitt über geometrische Funktionentheorie in aller Kürze zu besprechen.

Dieser Abschnitt gliedert sich in 9 Kapitel (I. Vorbereitende Bemerkungen. II. Die Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen. III. Weitere Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel. IV. Spezielle Funktionen und ihre Singularitäten. V. Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen. VI. Die konforme Abbildung einfach zusammenhängender schlichter Bereiche. VII. Spezielle Abbildungsfunktionen. VIII. Die Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes. Das Dirichletsche Prinzip. IX. Weitere Existenztheoreme der Funktionentheorie). — In diesen neun Kapiteln ist so ziemlich alles behandelt oder doch wenigstens gestreift, was für die Riemannsche Funktionentheorie, im weitesten Sinne, an Ideen und Problemen charakteristisch ist. Die Darstellung ist dabei so gehalten, dass der Leser auf die beiden ersten, die Weierstrasssche Funktionentheorie behandelnden Abschnitte des Buches nur zwecks Vergleichung der Methoden gelegentlich verwiesen wird; im Grunde bildet dieser Abschnitt über geometrische Funktionentheorie ein selbständiges Buch.

In Anbetracht der Fülle des Stoffes ist es selbstverständlich, dass die Darstellung nicht erschöpfend sein kann, und dass Herr Courant den Leser bei mancher Gelegenheit auf Spezialwerke verweisen muss In dieser Beziehung wird man indessen vielleicht bedauern, dass Herr Courant auch die grundlegenden Weylschen Entwicklungen über Riemannsche Flächen zur Spezialliteratur gerechnet hat. Es fällt ferner auf, gerade wegen der Überschrift „geometrische Funktionentheorie" des betrachteten dritten Abschnittes, dass im Kapitel über das alternierende Verfahren der Carathéodorysche Verschmelzungssatz nicht erwähnt wird. Dieser Satz hat den Ausgangspunkt einer funktionentheoretischen Richtung gebildet (Bieberbach, Carathéodory, Koebe), welche die Bezeichnung *geometrisch* eher verdienen dürfte als diejenige, vorwiegend an physikalische Vorstellungen anknüpfende, welche durch das Buch von Herrn Courant vertreten wird. Die erwähnte funktionentheoretische Richtung verfolgt übrigens gerade den Hauptzweck, die Problemstellungen der RIEMANNschen Funktionentheorie in die WEIERSTRASSsche Funktionentheorie einzuordnen, also, anschaulich gesprochen, den dritten Abschnitt des vorliegenden Buches mit den beiden ersten Abschnitten desselben in Einklang zu bringen. Es wäre vielleicht am Platze gewesen, den Leser auch über diese Bestrebungen zu orientieren.

Jedenfalls ist es sicher, dass die für das vorliegende Werk charakteristische Gegenüberstellung der beiden Hauptrichtungen der Funktionentheorie einen hohen paedagogischen Wert besitzt. Als Lehrbuch wird das Werk gewiss vorzügliche Dienste leisten.

Tibor Radó.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II (Grundlehren der math. Wissenschaften XV), XI + 302 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Wenige Wochen vor seinem Tode ward es FELIX KLEIN noch vergönnt, seine Vorlesungen über Geometrie neu herauszugeben und damit ein letztes Geschenk den Fachgenossen zu übermitteln. Mathematik und Mathematiker betrauern den Verlust des grossen Meisters der Geometrie, der nicht nur durch seine umfassende Entdeckungen, die in alle Gebiete der Geometrie eindringen, sondern auch durch seine meisterhaften Vorlesungen diesen Zweig der Mathematik neu aufblühen liess.

Die grosse Mannigfaltigkeit des behandelten Stoffes, die klare Hervorhebung der leitenden Ideen, die Berücksichtigung der historischen Momente charakterisieren auch diese Vorlesung, wie alle andern von FELIX KLEIN. Zumal handelt es sich in dem vorliegenden Buche zumeist um Probleme, die zu seiner innigsten Gedankenwelt gehören, die er selbst geschaffen, oder deren Entstehen er miterlebt hat. Dem ist die Lebhaftigkeit der Darstellungsweise zu verdanken, die das Werk zu einer allen Mathematikern angenehmen Lektüre macht.

Das Werk selbst besteht aus drei Teilen. Der erste, den geometrischen Gebilden gewidmet, wird durch die GRASSMANNschen Ideen beherrscht; dabei aber die Beziehungen zu den verschiedenen Disciplinen (Vektorrechnung, Mechanik, MÖBIUSsches Nullsystem) mit der, dem Verfasser eigentümlichen Klarheit, auseinandergesetzt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den geometrischen Transformationen, wobei an jeder Stelle die Anwendbarkeit der besprochenen Transformation durch interessante geometrische Sätze illustriert wird. Mit einem schönen Überblick über die Imaginärtheorie von STAUDT endet dieser Abschnitt. Der dritte Teil ist der Systematik gewidmet; das berühmte Erlanger Programm, die CAYLEY-KLEINsche Massbestimmung wird zunächst in Anlehnung an die Invariantentheorie auseinandergesetzt. Dem folgt ein umfassender Exkurs über die Grundlagen der Geometrie, der mit der Erläuterung von EUKLIDES Elementen endet.

Den Abschluss der Vorlesung bildet ein Kapitel über den geometrischen Unterricht in den höheren Schulen, in dem auch wohl derjenige viel Interessantes findet, der sich nicht mit Pädagogie beschäftigt.

Die ausgezeichnete Ausarbeitung ist ein Verdienst von Herrn E HELLINGER.

A. H.

A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. Übersetzt von *A Ostrowski* und *H. Schmidt* (Grundlehren der math. Wissenschaften XVIII), XIV + 377 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Das vorliegende Werk des berühmten englischen Astrophysikers reiht sich würdig an die bekannten klassischen Darstellungen der Relativitätstheorie von Weyl und von v. Laue und ergänzt sie auf das trefflichste. Baut Laue schrittweise im strengen Anschluss an die Erfahrung die Theorie allmählich auf, und führt Weyl eine systematische Verallgemeinerung der Geometrie durch, der ihn schliesslich zu seiner verallgemeinerten Massbestimmung und zu einer gruppentheoretischen Vertiefung der geometrischen Grundlagen führt, so erstrebt Eddington eine systematische deduktive Darstellung der gesamten Theorie, wobei die allgemeine Relativitätstheorie im Vordergrunde steht. Daraus ergibt sich, dass das Buch sich nicht für solche eignet, die mit der Theorie und den grundlegenden Tatsachen, die zur Theorie geführt haben, gar nicht bekannt sind. Die allgemeinen Grundlagen konnten umso mehr vorausgesetzt werden, da Eddington sie in einer auch für weitere Kreise geeigneten Darstellung in einem besonderen Werke (Raum, Zeit und Gravitation, Übersetzung bei Vieweg u. Sohn, Braunschweig) behandelt hat. Eine gewisse Bekanntschaft mit den Grundlagen vorausgesetzt, eignet sich das Werk von Eddington vorzüglich für ein eingehenderes Studium der Theorie, es ist immer sehr lebhaft und anregend geschrieben, seine Bemerkungen und Andeutungen sind besonders für den mit dem Stoff bereits Vertrauten vom höchsten Interesse.

Der Inhalt gliedert sich in sieben Kapitel, die folgendermassen betitelt sind: I. Elemente der Theorie. II Der Tensorkalkül. III. Das Gravitationsgesetz. IV. Relativistische Mechanik. V. Krümmung der raumzeitlichen Welt. VI. Elektrizität. VII. Weltgeometrie, und ein Anhang von A. Einstein: Eddingtons Theorie und Hamiltonsches Prinzip

Aus dem reichen Inhalt möchten wir besonders die übersichtliche Entwicklung des Tensorkalküls hervorheben, sowie die eingehende Darstellung der Einsteinschen und de Sitterschen Theorie über die Gestalt der raumzeitlichen Welt im Grossen (Kap. V.). Es muss aber erwähnt werden, dass hervorragende Forscher mit der hier dargelegten Auffassung der de Sitterschen Welt nicht einverstanden sind.[1])

Im Kapitel VI. und VII, sowie in dem Anhang werden die neuesten Versuche der Weiterbildung, die von Weyl, Eddington und Einstein herrühren, dargestellt; so die Weiterbildung der geometrischen Grundlagen von Weyl und Eddington, die Einordnung des elektromagnetischen Feldes in die Theorie mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips.

Rudolf Ortvay.

---

[1]) Siehe das Referat über die erste englische Ausgabe von M. v. Laue, Die Naturwissenschaften, 11, S. 382—384, 1923. Einige Bemerkungen Laues betreffen diese auch die zweite englische Ausgabe berücksichtigende Übersetzung.

G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II. Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie (Grundlehren der math. Wissenschaften XX), VIII + 407 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Dieser zweite Band des ausgezeichneten Werkes enthält fast 900 Aufgaben samt Lösungen, darunter auch viele leichte, die aber grösstenteils zugleich dazu dienen, in tiefreichende, erst seit kurzem erledigte Fragestellungen hineinzuleuchten und den Leser Schritt für Schritt zur Lösung hinzugeleiten. Verfasser scheinen den alten Spruch, nach welchem es zur Mathematik keinen Königsweg gibt, mit grossem Eifer und mit viel Erfolg zu bekämpfen.

Von dem überreichen Stoffe, der in diesem Bande behandelt wird, seien hier nur einige Problemkreise erwähnt: schlichte Abbildungen, Lage der Nullstellen der Polynome und transzendenter Funktionen, Tschebyscheffsche Polynome und Verwandtes, Interpolation, positive quadratische Formen und ihre Anwendung auf die Funktionentheorie, zahlentheoretische Funktionen etc.

F. R.

A. Schönflies, Einführung in die analytische Geometrie. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen XXI), X + 304 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Die vorliegende Einführung in die analytische Geometrie gibt nicht nur eine systematische Darstellung, sondern auch ein leicht verständliches Lehrbuch der analytischen Geometrie. Der Verfasser, der in seinen als klassisch geltenden Werken sein schöpferisches Talent mit den pädagogischen Gesichtspunkten immer in Harmonie bringen kann, betont, dass er in seiner Einführung vor allem ein Lehrbuch zum Studieren geben will. Dieser Gesichtspunkt drückt sich in dem synthetischen Aufbau, in der Auswahl und Anordnung des Stoffes, in der Art der Methoden aus, die also in der Hauptsache den didaktischen Zielen entsprechen. Auf diese Weise ist es ihm gelungen ein vortreffliches Lehrbuch der analytischen Geometrie zu verfassen, welches dem Studierenden die verschiedenen Gesichtspunkte und Methoden dieser Disziplin klarmacht. Der Inhalt beschränkt sich hauptsächlich auf das lineare Gebiet und bringt selbst für die Behandlung des Quadratischen die für das Lineare charakteristischen Methoden und Mitteln.

Das Buch fängt an mit einigen vorbereitenden Betrachtungen, die einerseits leicht und verständlich, andererseits allgemein genug sind um dem Leser das Wesen der Probleme klarzustellen. (Z. B. führt er im Abschnitt III. früher die Gleichungen der Kegelschnitte als die der Geraden ein, was aus systematischem Gesichtspunkte her falsch wäre, dagegen als ein pädagogischer Kunstgriff erscheint.) Nach der ausführlichen Behandlung der Geraden in der Ebene werden die Kegelschnitte betrachtet. Nachher kommt die Geometrie des Raumes zur Darstellung, nämlich die Ebenen im Raume und die Flächen zweiter Ordnung. In einem Anhang werden über Determinanten, Substitutionen usw. die für die analytische Geometrie notwendigen algebraischen Hilfsmittel abgeleitet.

B. v. Kerékjártó.

L. Schlesinger und A. Plessner: Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. VIII + 229 S., Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig, 1925.

Der Zweck, den die Verfasser vor sich stellen, ist einen Zugang zur Theorie des Lebesgueschen Integrals für angehende Mathematiker zu eröffnen. Obwohl es schon eine Anzahl vorzüglicher Lehrbücher über diese Theorie gibt, wird das vorliegende auch sehr gut seinen Platz finden. Die Abgrenzung des Stoffes ist durch zwei Gesichtspunkte bestimmt: erstens ist er in der Richtung entwickelt, die zur modernen Theorie der Fourierschen Reihen führt; zweitens gibt zwar das Buch genügend viel für ein erstes Studium der reellen Funktionentheorie, doch geht es nicht sehr tief in dieselbe hinein; es dient zu einer gründlichen Orientierung, nicht aber zur Anleitung zu weiteren wissenschaftlichen Forschungen — was auch nicht in der Absicht der Verfasser zu liegen scheint.

Nach drei Abschnitten über die Grundbegriffe der Mengenlehre, über das Lebesguesche Mass und über Funktionenfolgen gelangt man zum Hauptabschnitt des Buches, welches das Lebesguesche Integral unter Zugrundelegung der ursprünglichen geometrischen Definition von Lebesgue behandelt. Im fünften Abschnitt wird die Theorie der reellen Funktionen von einer und von zwei Veränderlichen weiter ausgeführt; im Schlussabschnitt werden die Hauptresultate der Theorie der Fourierschen Reihen dargestellt.

Im Abschnitt über Fouriersche Reihen fällt es auf, dass die Verfasser den von ihnen sogenannten Fejér-Lebesgueschen Satz zuerst herleiten und daraus als Spezialfall den Fejérschen Satz; es wäre richtiger umgekehrt, denn der ursprüngliche Fejérsche Satz bildet den Kern dieser Resultate Aber es scheint auch sonst die Tendenz der Verfasser zu sein, den historisch-didaktischen Gesichtspunkt unterdrückend, vom Allgemeinen auf das Spezielle zu schliessen (z. B. Lebesguesches und Peano-Jordansches Mass, Lebesguesches und Riemannsches Integral).

Das Buch ist leicht verständlich, setzt an Vorkenntnissen wenig voraus, sodass es als ein geeignetes Lehrbuch der Anfangsgründe dieser Theorie gelten wird.

B. v. Kerékjártó.